



# Nástroje používané v ekonómii: Grafy a matematický dodatok

Cvičenie 1.



Ing. Zuzana Staníková, PhD.

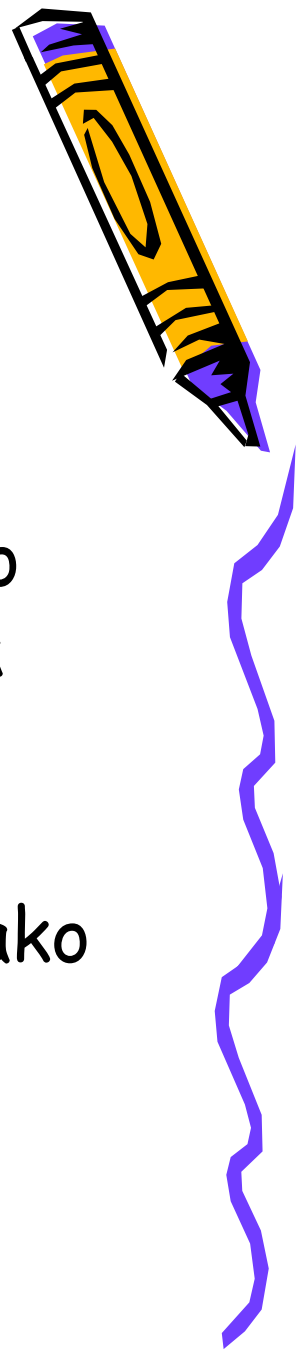
# Podmienky absolvovania predmetu EaPAP



- Písomka v 12. týždni (max 20 bodov)
- Aktívna účasť na cvičeniach (max 5 bodov)
- Ku skúške postupujú študenti, ktorí získali z cvičení min 15 bodov
- Materiály k cvičeniam:  
<http://kmme.fri.uniza.sk/index.php/zamestnanci/zuzana-stanikova/epap-stanikova/>

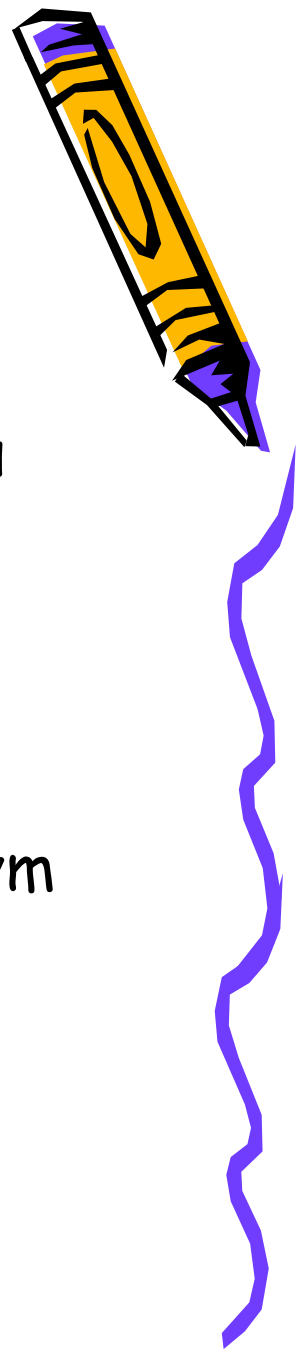


# Grafy používané v ekonomických modeloch



- Ekonomický model
  - je zjednodušený opis ekonomiky alebo určitej časti ekonomiky, ako je firma alebo domácnosť.
  - Skladá sa z výrokov o ekonomickom správaní, ktoré môžu byť vyjadrené ako rovnice alebo ako krivky v grafe.





- Napríklad, rozhodnutie o kúpe určitého statku ovplyvňujú :
  - príjem, zvyklosti, cena daného statku, ceny iných porovnateľných statkov, ceny komplementov daného statku.
- $\Rightarrow$  komplikované situácie  $\Rightarrow$  problém s grafickým znázornením  $\Rightarrow$  potreba zjednodušenia tejto situácie

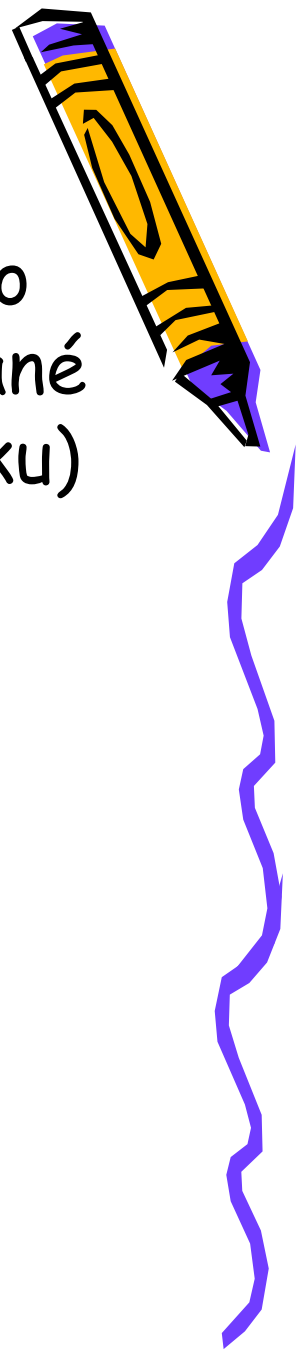


## Príklad:

Predpokladáme, že dopytované množstvo statku závisí len na jeho cene (dopytované množstvo je funkciou ceny daného statku) (ceteris paribus):

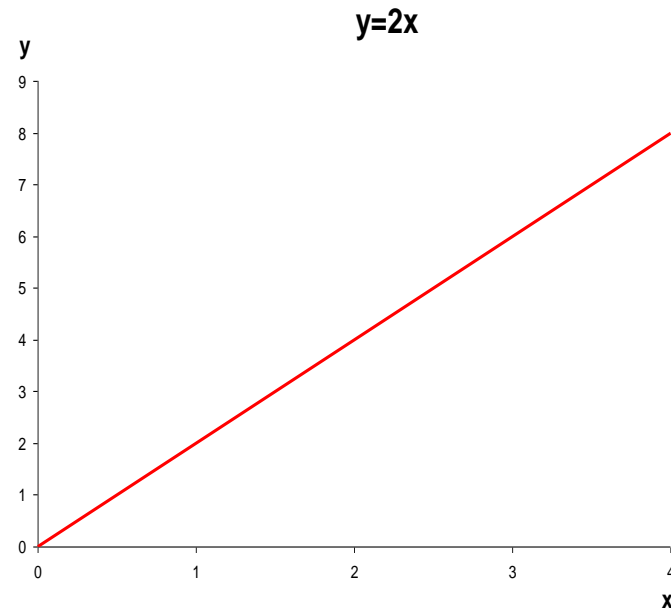
$$Q = f(P)$$

Z tohto zápisu ale nie je jasné aká je závislosť premennej  $y$  na premennej  $x$ .

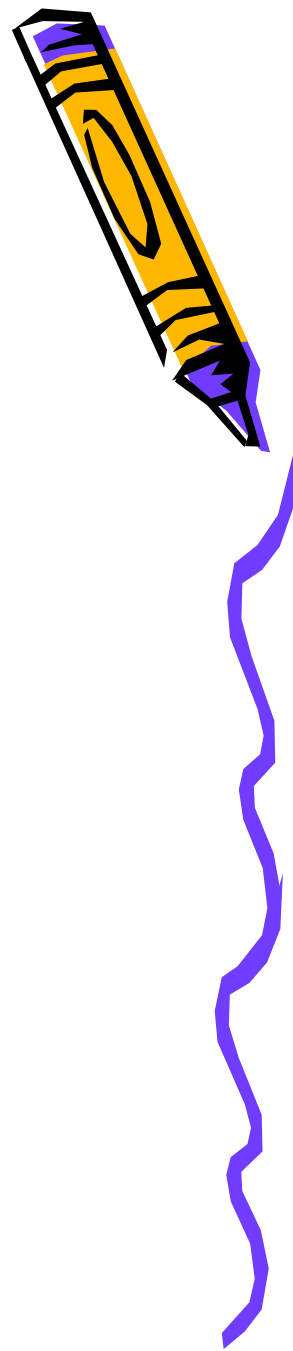
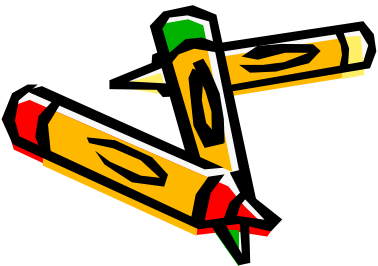


# Matematika:

- os  $x$  = nezávisle premenná
- os  $y$  = závisle premennú

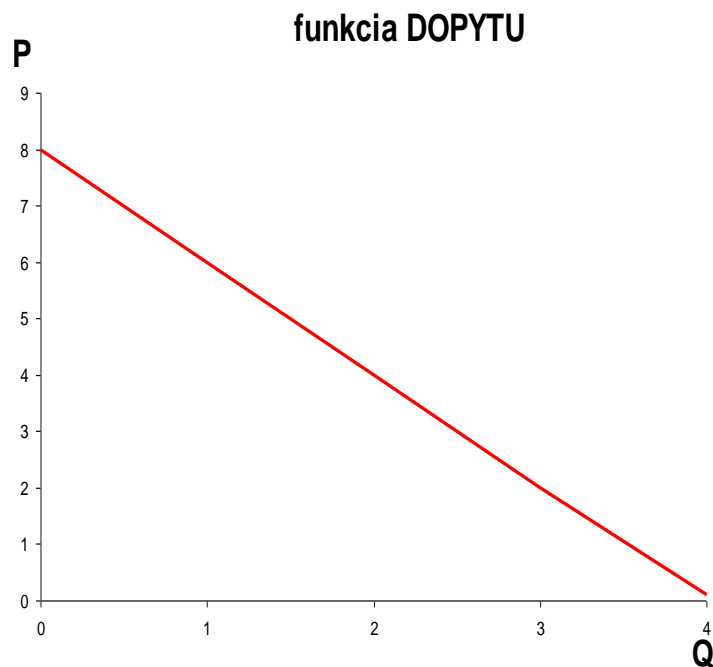


funkcia  $y = f(x) = 2x$   
 $y$  (závislá premenná)  
 $x$  (nezávislá premenná)



# Ekonomía

- súradnicové osi bývajú často vymenené:
  - os  $x$  = závisle premenná
  - os  $y$  = nezávisle premenná



## Príklad:

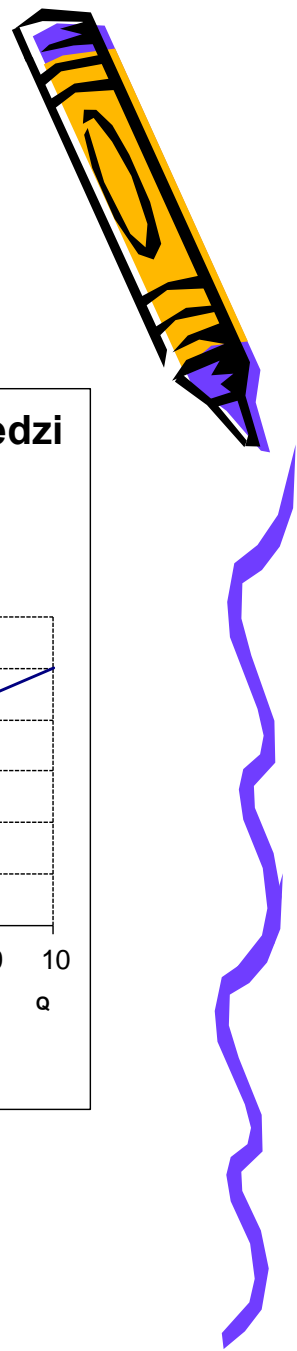
dopyt a ponuka:

P (cena)- nezávisle premenná bude na osi  $y$

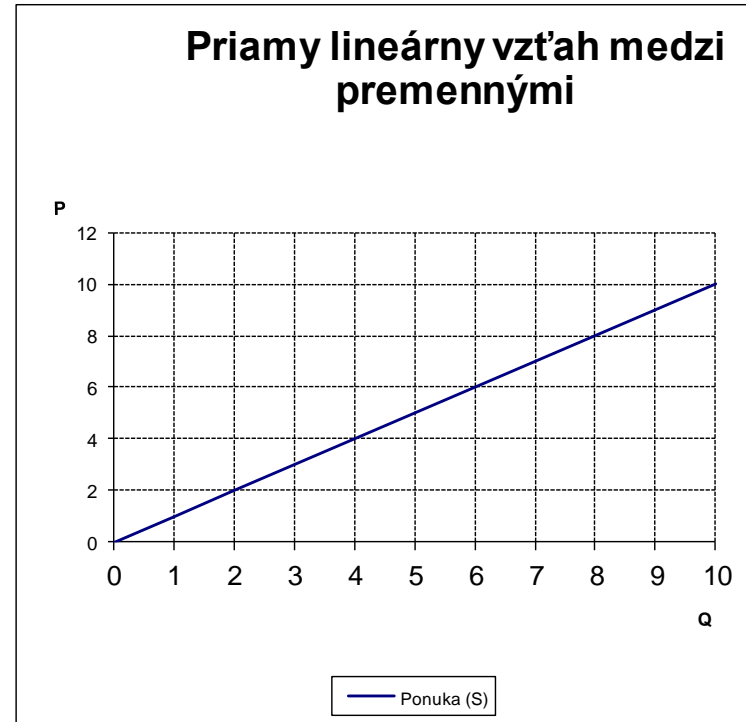
Q (množstvo)- závisle premenná bude na osi  $x$



# Vzťahy medzi premennými

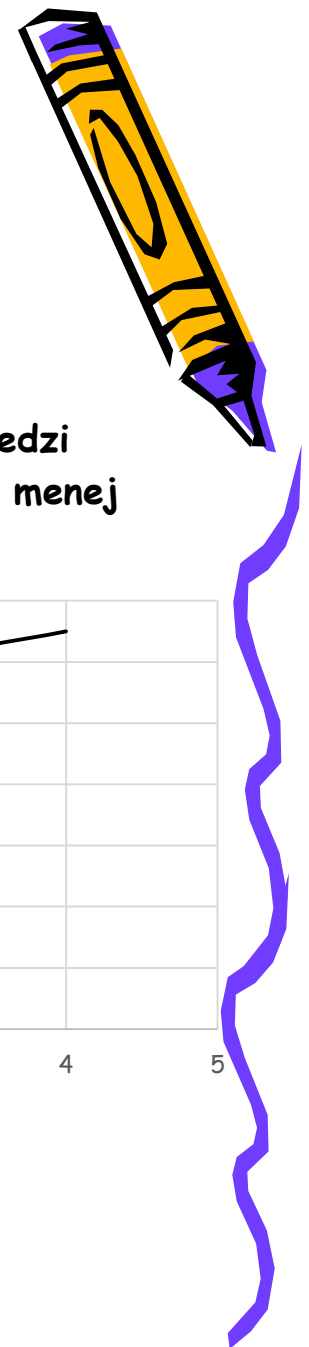


- priamy (kladný) lineárny vzťah:
- rast jednej premennej vedie k rastu druhej premennej (napr. funkcia ponuky)



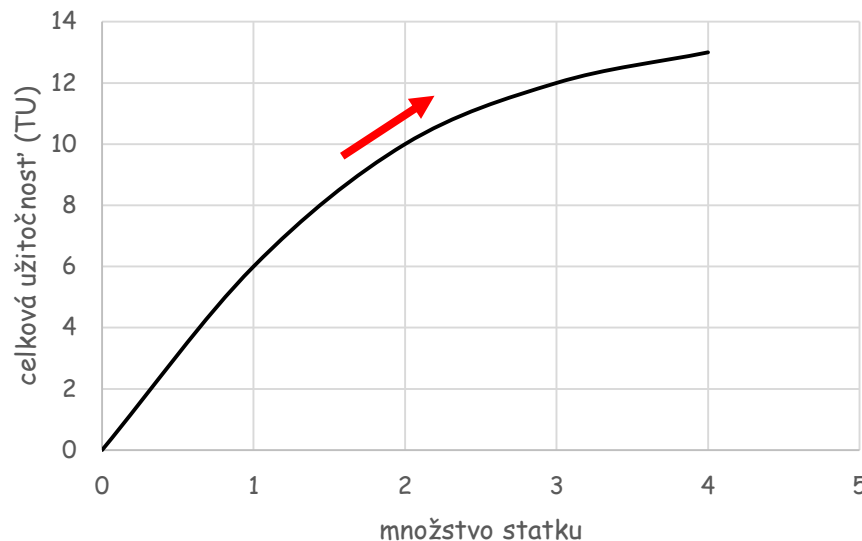


# Vzt'ahy medzi premennými

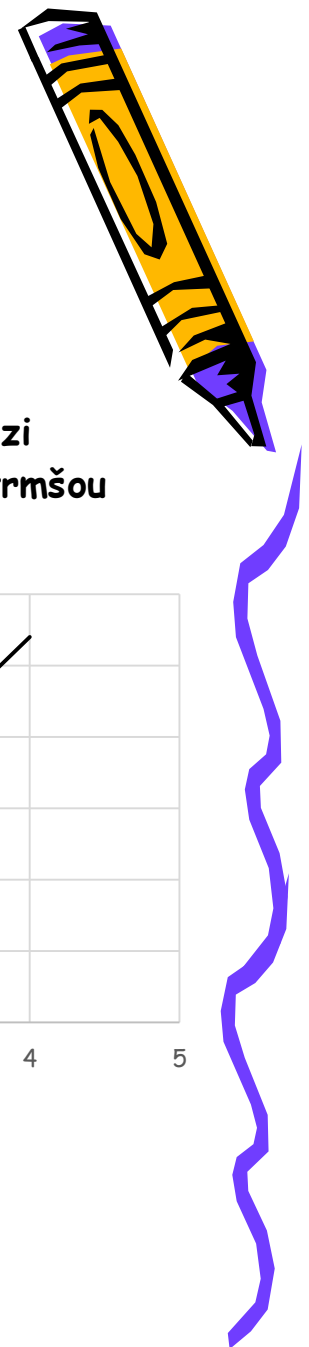


- priamy (kladný) nelineárny vzťah:
- Ak sa pohybujeme pozdĺž krivky smerom hore, premenná na osi y sa zvyšuje pomalším tempom, než premenná na osi x.

Priamy nelineárny vzťah medzi premennými - krivka sa stáva menej strmou voči počiatku

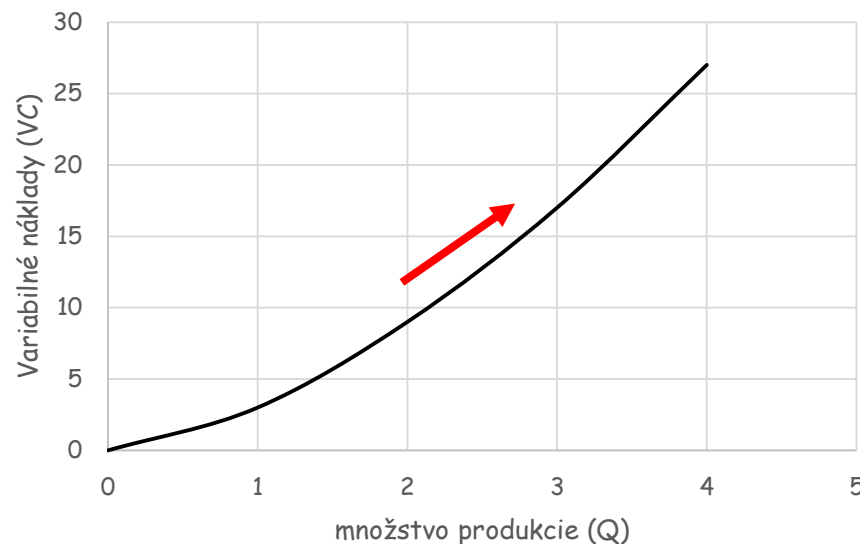


# Vzt'ahy medzi premennými



- priamy (kladný) nelineárny vzťah:
- Ak sa pohybujeme pozdĺž krivky smerom hore, premenná na osi y sa zvyšuje rýchlejším tempom, než premenná na osi x.

Priamy nelineárny vzťah medzi premennými - krivka sa stáva strmšou voči počiatku

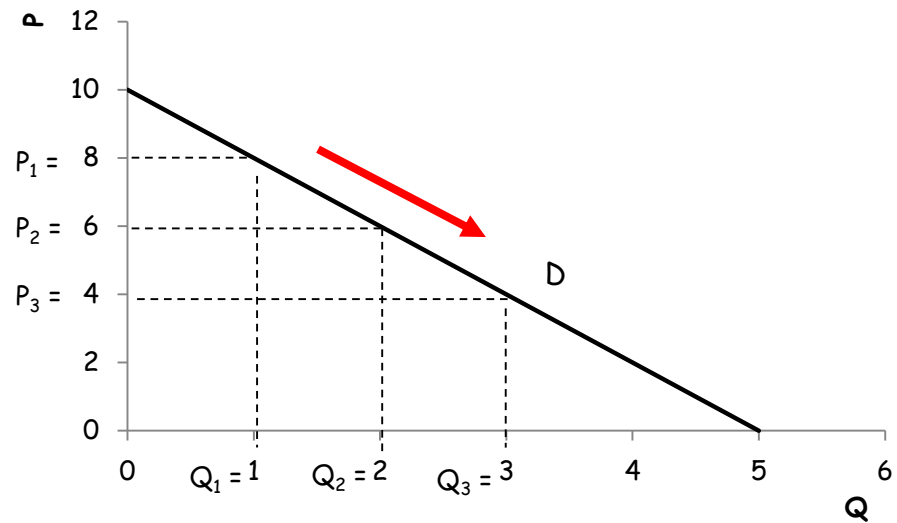


# Vzt'ahy medzi premennými

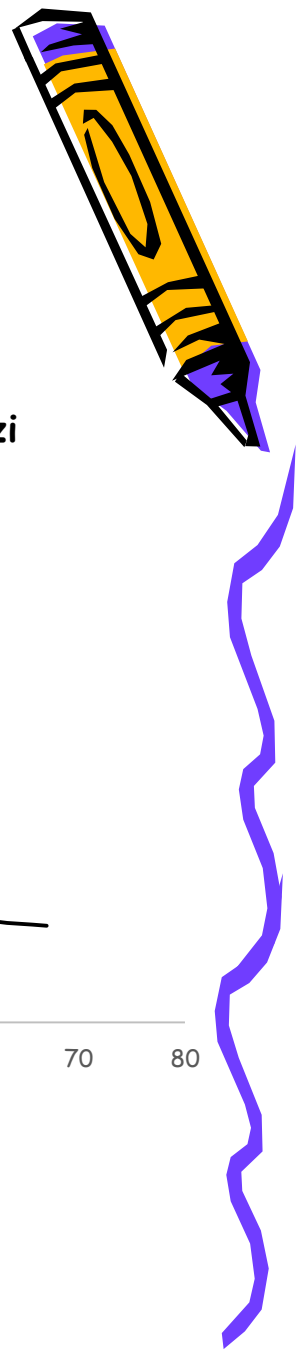


- nepriamy, záporný vzťah:
- rast jednej premennej vedie k poklesu druhej premennej rovnakou mierou. (napr. funkcia dopytu)

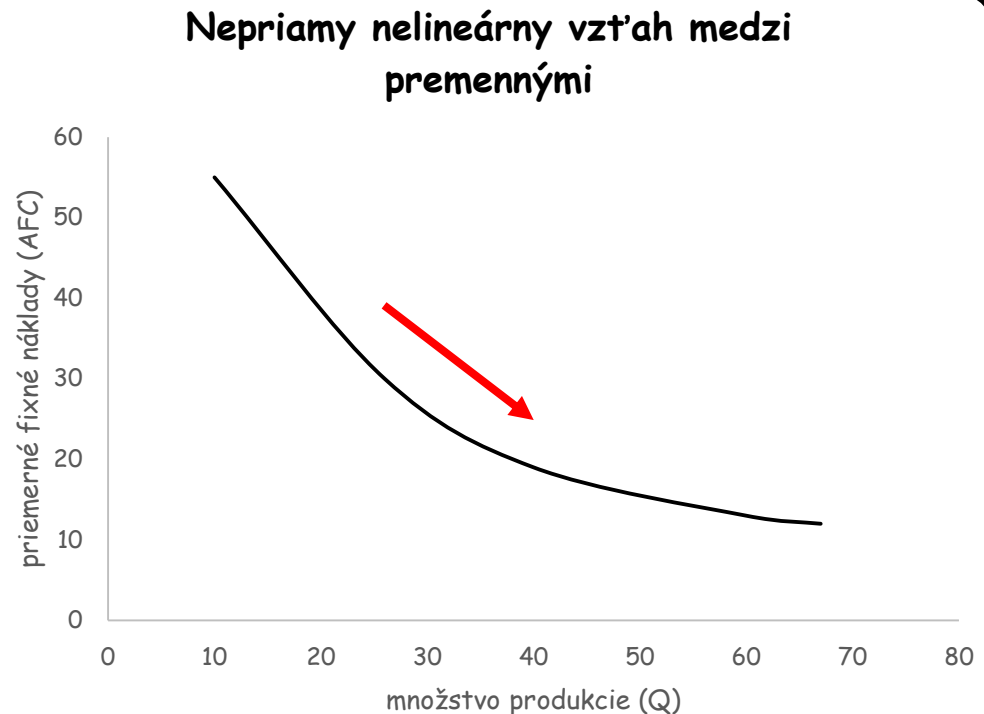
Nepriamy lineárny vzťah medzi premennými



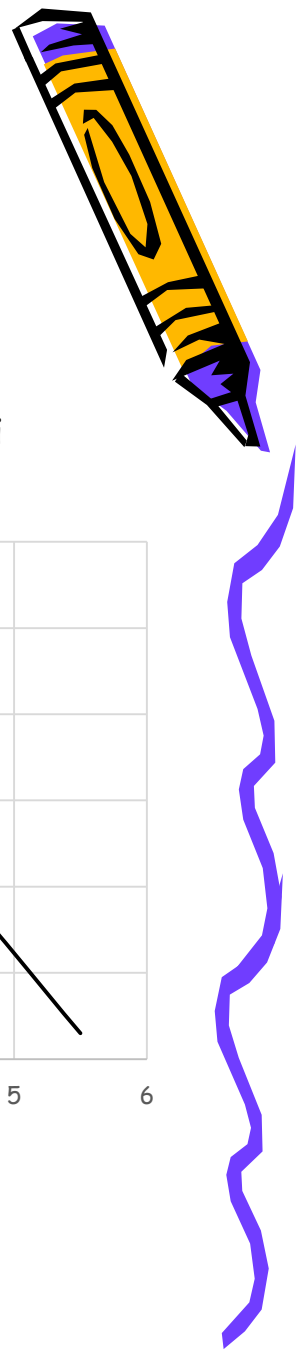
# Vzt'ahy medzi premennými



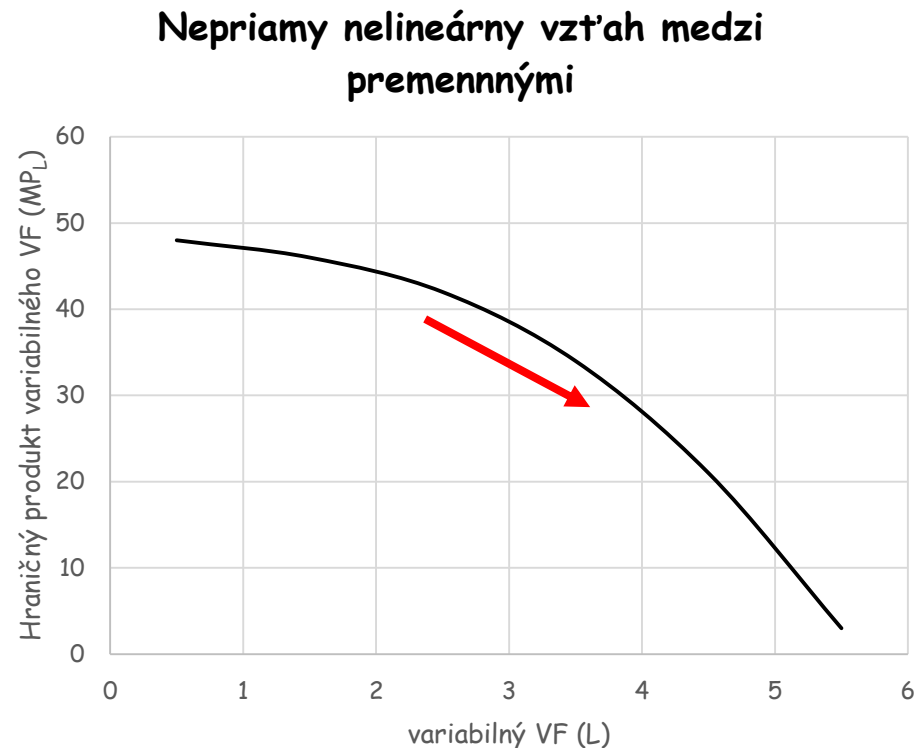
- nepriamy, záporný vzťah:
- rast jednej premennej vedie k poklesu druhej premennej - krivka klesá čoraz menej strmo voči počiatku



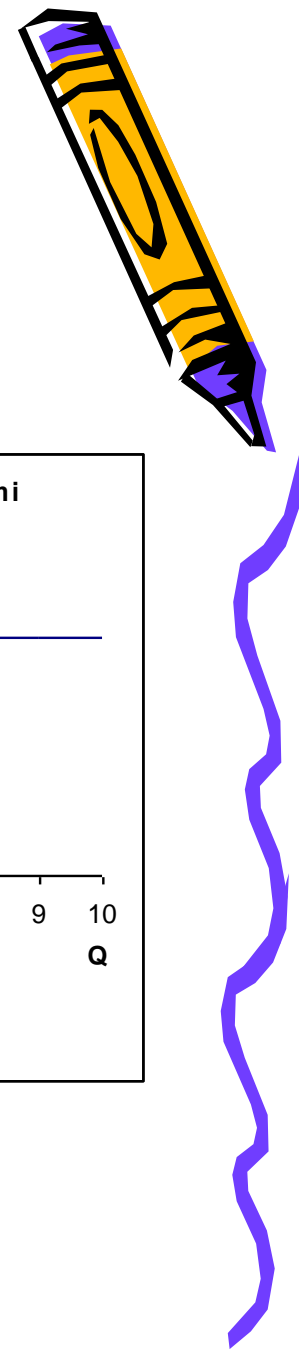
# Vzt'ahy medzi premennými



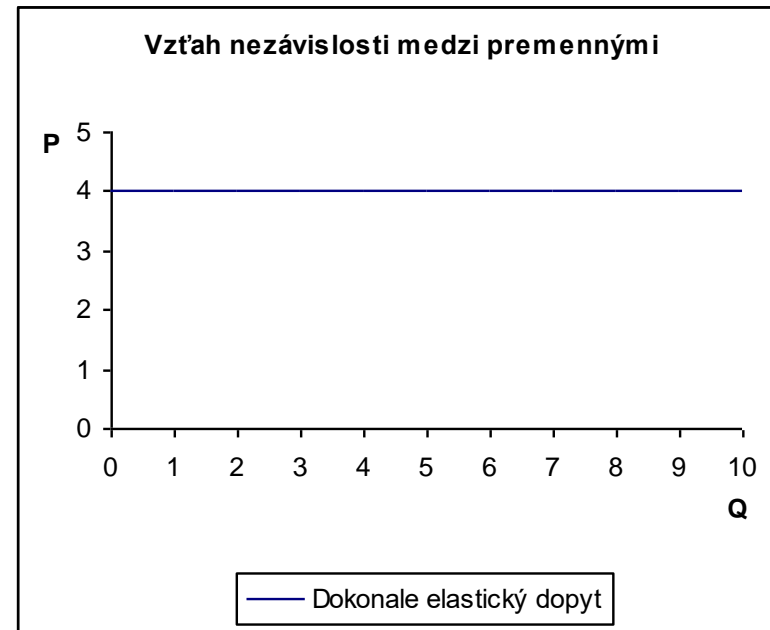
- nepriamy, záporný vzt'ah:
- rast jednej premennej vedie k poklesu druhej premennej - krivka klesá čoraz strmšie voči počiatku



# Vzt'ahy medzi premennými



- Vzájomná nezávislosť premenných:
- rast jednej premennej nevedie k zmene druhej premennej



# Smernica, sklon a strmost' priamky



## Smernica :

- Na lepšie pochopenie vzťahov medzi premennými
- rozlišujeme smernicu priamky a smernicu krivky.



# Smernica priamky

- zmena premennej na vertikálnej osi (y) ku zmene premennej na horizontálnej osi (x).

$$\textit{smernica} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- Z geometrického hľadiska je pomer  $\Delta y / \Delta x$  definovaný ako tangenta uhla, ktorý zvierá priamka s osou x.
- Sklon priamky je vyjadrený tangentou tohto uhla.
- Limita tohto pomeru je

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = y'$$

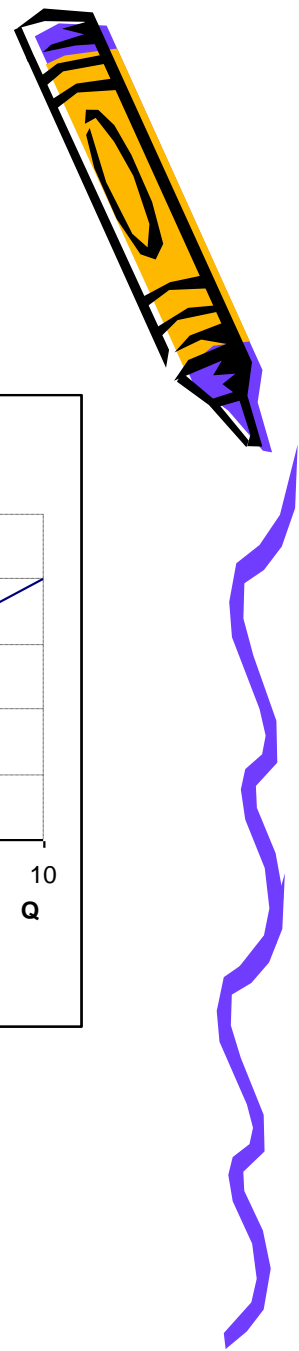
Ide o prvú deriváciu funkcie y.

Ing. Zuzana Staníková, PhD.



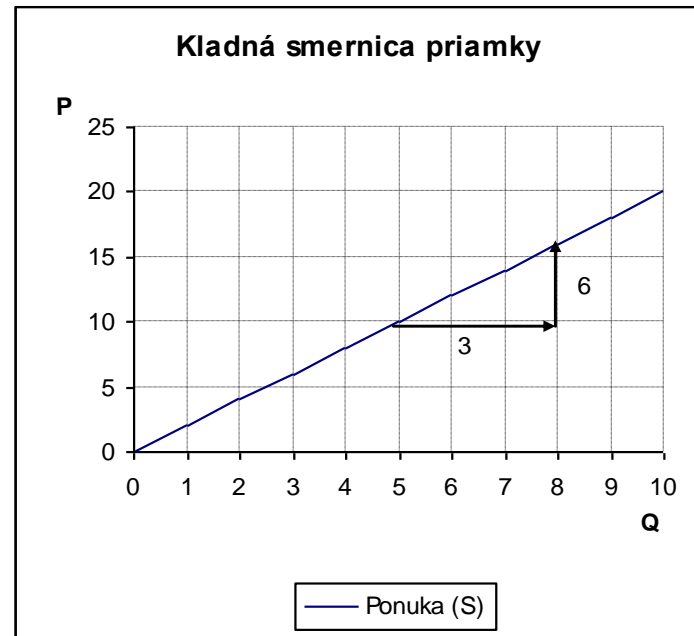


# Smernica môže byť:



## Kladná:

- ak sa obidve premenné menia rovnakým smerom ( $\uparrow x \uparrow y$ )



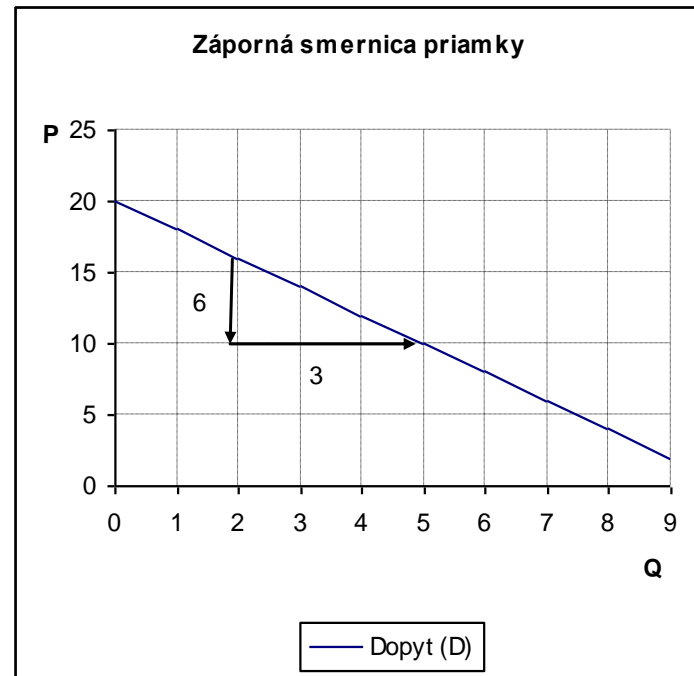
$$\textit{smernica} = \frac{6}{3} = 2$$



# Smernica môže byť:

## Záporná

- ak sa obidve premenné menia opačným smerom ( $\uparrow x \downarrow y$ )

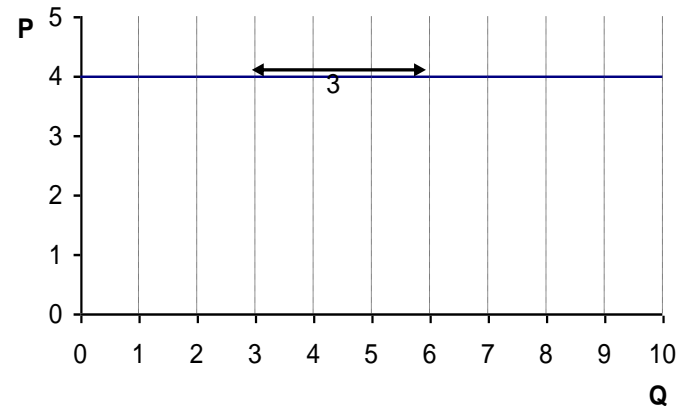


$$\textit{smernica} = \frac{-6}{3} = -2$$

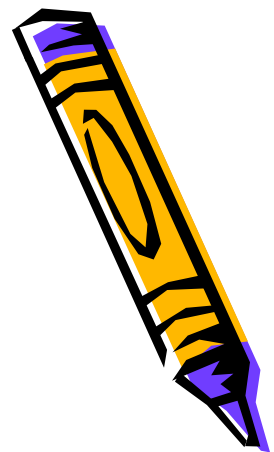
# Extrémne prípady smernice priamky

- smernica rovnobežky s osou x = 0

Smernica rovnobežky s osou x

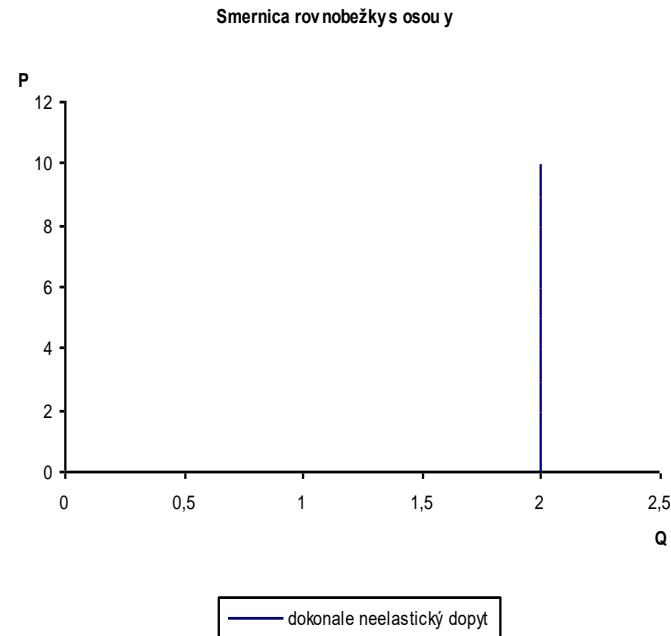


$$\textit{smernica} = \frac{0}{3} = 0$$

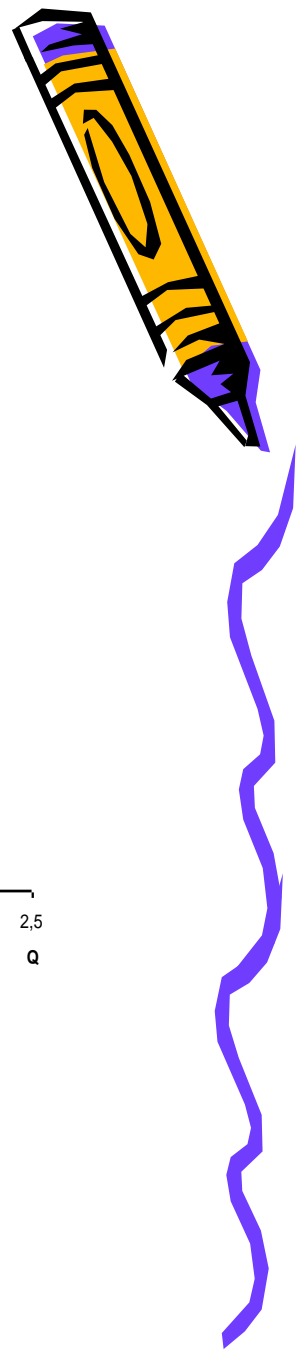


# Extrémne prípady smernice priamky

- smernica rovnobežky s osou  $y = \infty$



$$\textit{smernica} = \infty$$



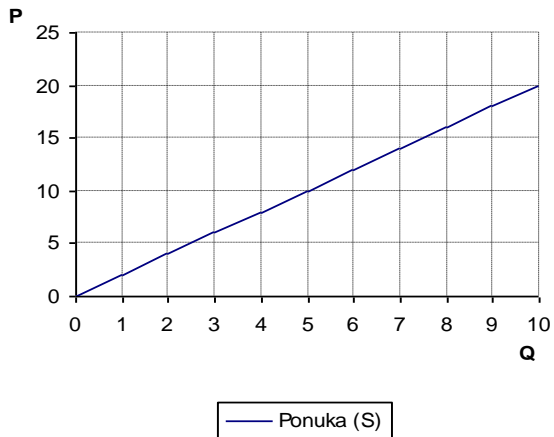
# Sklon priamky

- **Sklon priamky:** absolútna hodnota smernice priamky
- Smernica, resp. sklon priamky sa medzi jednotlivými bodmi nemení, je **konštantná**.

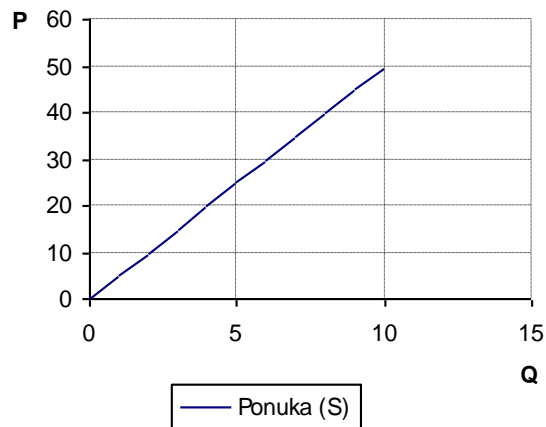


# Strmost' priamky

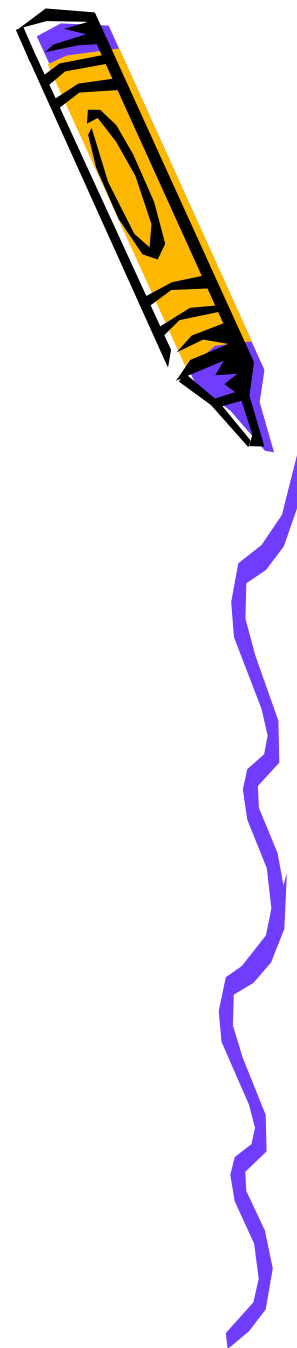
Strmost' priamky



Strmost' priamky



- Strmost' priamky závisí od mierky grafu



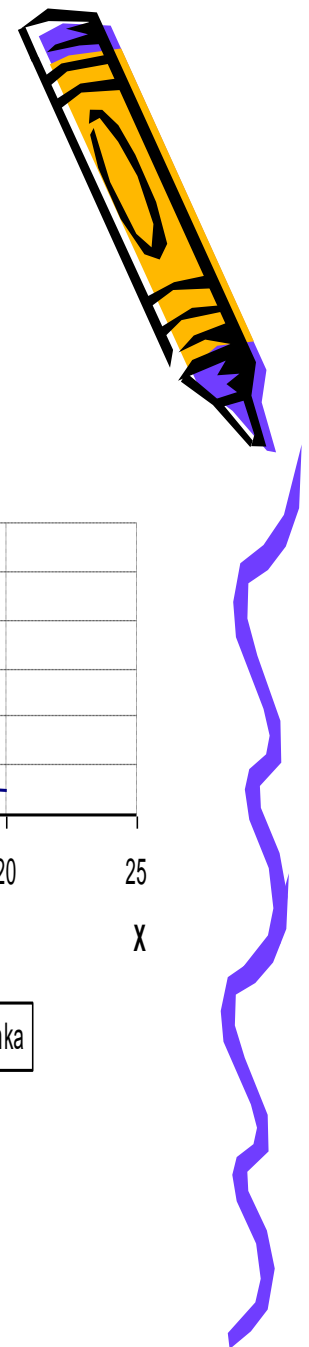
# Smernica a sklon krivky



- Nelineárne vzťahy medzi ekonomickými premennými vyjadrujeme pomocou kriviek  $\Rightarrow$  smernica krivky.
- smernica krivky sa mení v každom jej bode.
- absolútna hodnota smernice krivky udáva jej sklon.
  - smernicu a sklon krivky v bode
  - smernica a sklon krivky medzi dvomi bodmi.

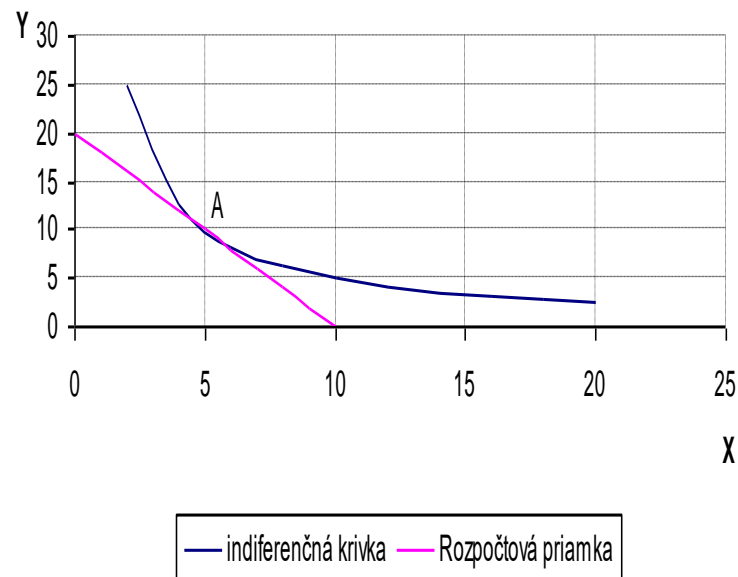


# Smernica a sklon krivky v bode



- určíme ju ako smernicu dotyčnice krivky v tomto bode.
- Smernica dotyčnice v bode A je  $-20/10=-2$
- Smernica je záporná preto, lebo premenné x a y sú v nepriamom vzťahu.

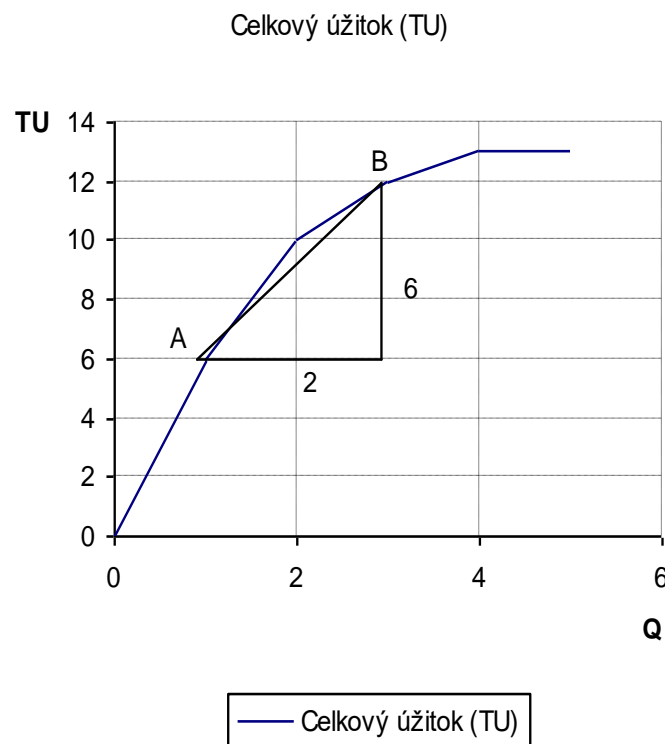
smernica krivky v bode



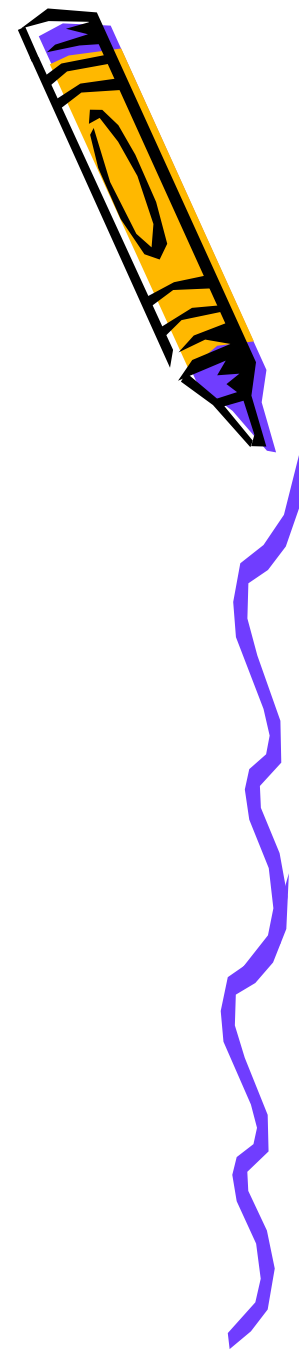


# Smernica a sklon krivky medzi dvomi bodmi

- učíme ju ako smernicu spojnice dvoch bodov krivky
- Smernica krivky Celkového úžitku (TU) medzi bodmi A a B je  $6/2=3$

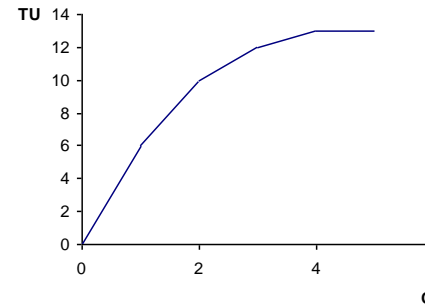


# Hraničné veličiny a ich grafické znázornenie

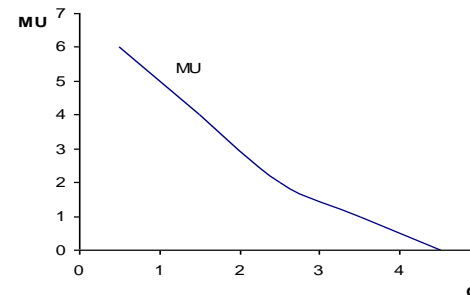


- Používajú sa na skúmanie vplyvu veľmi malých zmien nezávisle premennej  $x$  na zmenu závisle premennej  $y$ . (napr. hraničný úžitok)
- Ide o jednotkové veličiny
- geometrická interpretácia: hraničná veličina je graficky sklonom celkovej funkcie

Celkový úžitok (TU)



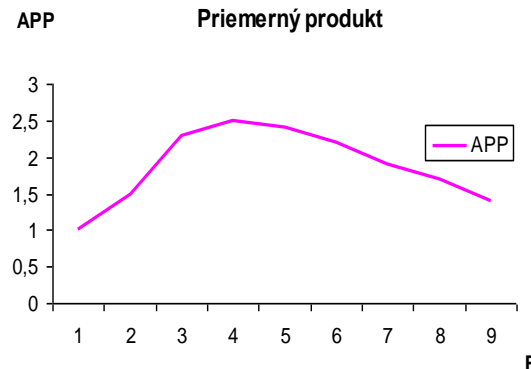
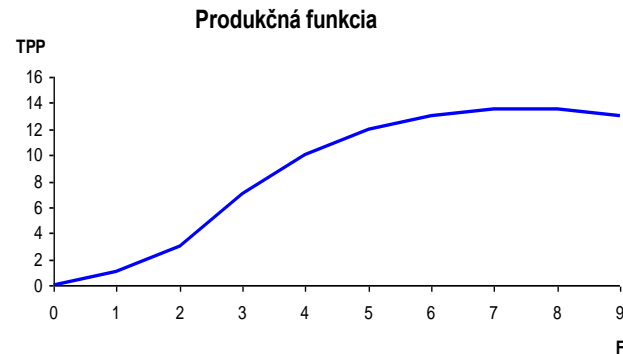
Hraničný úžitok



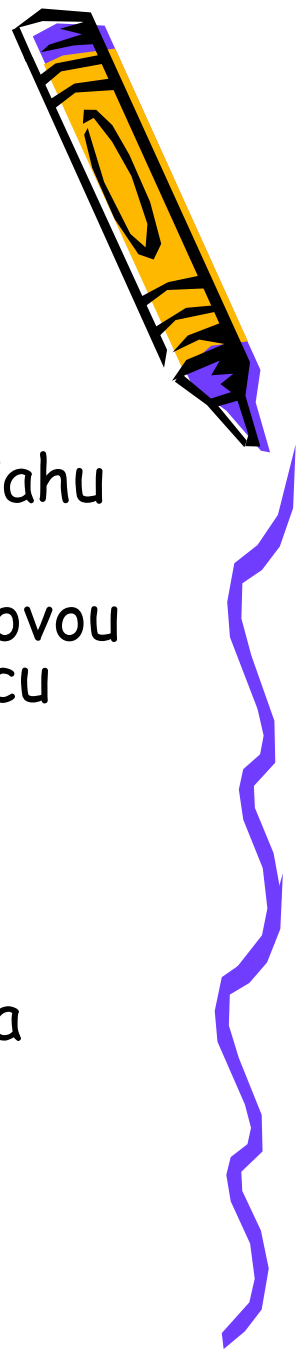
# Priemerné veličiny a ich grafické znázornenie



- Ide o jednotkové veličiny
- Graficky je priemerná veličina sklonom priamky vedenej z počiatku do bodu na krivke znázorňujúcej celkovú funkciu.



# Sú nasledujúce tvrdenia správne? ÁNO/NIE



1. Ak rast jednej premennej nevedie ku zmene druhej premennej, hovoríme o nepriamom vzťahu medzi premennými.
2. Zmena premennej na osi  $y$  spôsobená jednotkovou zmenou premennej na osi  $x$ , vyjadruje smernicu priamky.
3. Smernica priamky súčasne vyjadruje aj jej strmosť.
4. Keď je funkcia znázorňujúca celkové veličiny rastúca, bude rastúca aj funkcia znázorňujúca hraničné veličiny.



# Doplňte:



1. Smernica priamky je kladná vtedy, ak sa obidve premenné menia ..... smerom.
2. Smernica krivky v bode je záporná vtedy, ak sa obidve premenné menia ..... smerom.
3. Smernicu alebo sklon krivky v bode určíme ako .....
4. Smernica a sklon krivky medzi dvomi bodmi
5. Hraničnú veličinu geometricky vyjadríme ako ..... v bode krivky celkovej veličiny a algebraicky ako ..... celkovej veličiny.



# Matematický dodatok



## Funkčné závislosti:

Algebraicky môžeme funkčnú závislosť medzi premennými  $x$  a  $y$  zapísať ako:

$$y=f(x)$$

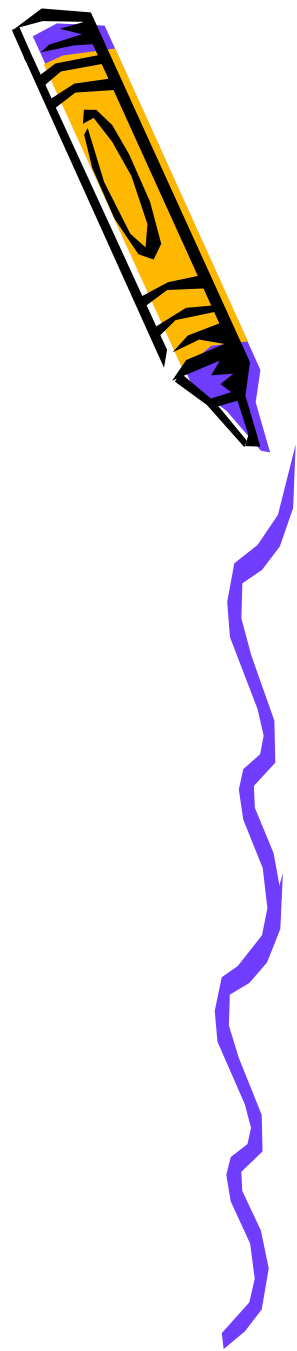
- $x$ -nezávisle premenná
- $y$ - závisle premenná
- Zápis  $y=f(x)$  vyjadruje, že  $x$  sa mení nezávisle, zatiaľ čo  $y$  závisí na hodnote  $x$ .
- Premenná  $y$  môže závisieť na niekoľkých premenných  $x_1, x_2, \dots$
- Potom  $y=f(x_1, x_2)$



# Lineárne funkcie

Lineárna funkcia má podobu:

- $y = ax + b$
- kde  $a$  a  $b$  sú konštanty  
alebo môže byť vyjadrená implicitne v tvare:
- $ax + by = c$



# Zmeny a miery zmien

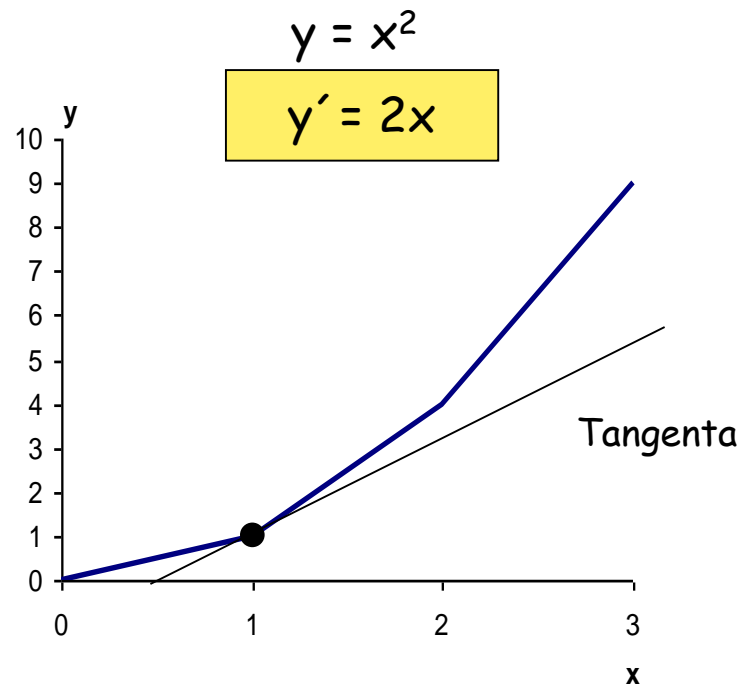
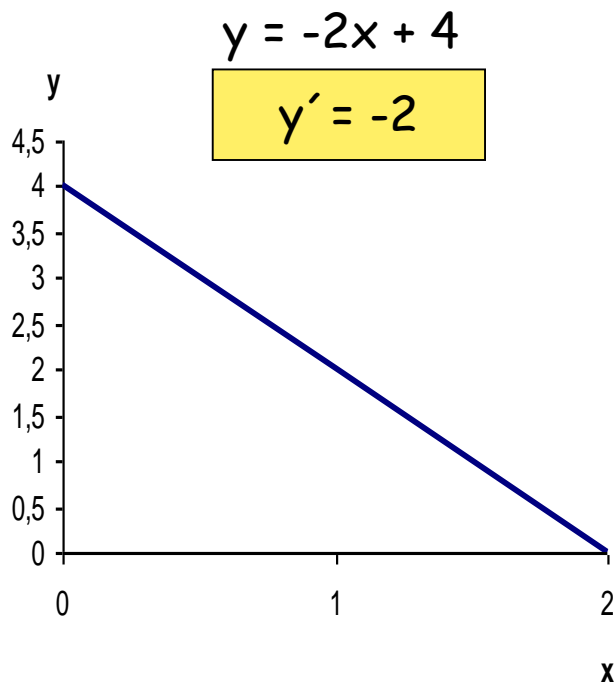


- Zmenu hodnoty  $x$  zapíšeme:  $\Delta x$
- Ak sa  $x$  zmení z  $x_1$  na  $x_2$ , potom zmenu  $x$  zapíšeme:  
 $\Delta x = x_2 - x_1$
- $\Delta x$  zodpovedá malej zmene
- Mieru zmeny vyjadríme ako pomer dvoch zmien:  
 $\Delta y / \Delta x$





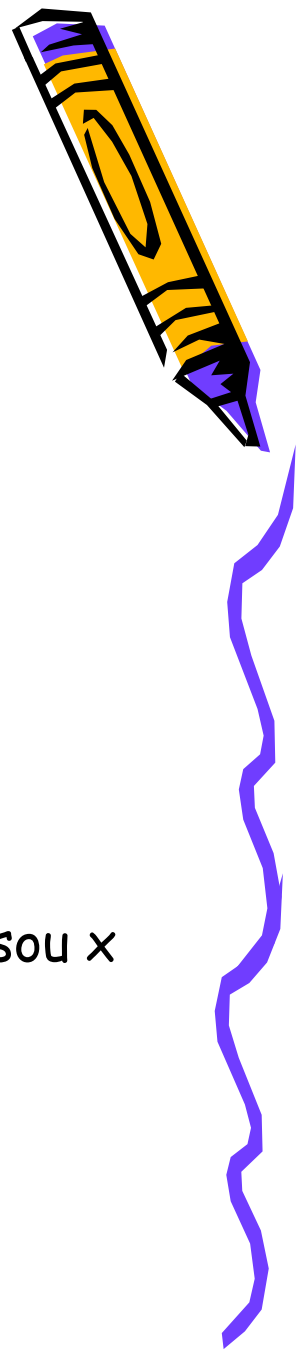
Miera zmeny určitej funkcie môže byť graficky interpretovaná ako SKLON tejto funkcie.



sklon v každom bode funkcie je 2, smernica je -2 (znamená, že funkcia je klesajúca)

sklon v bode  $x = 1$  je 2, smernica je 2  
sklon v bode  $x = 2$  bude 4, smernica bude 4 (znamená, že funkcia je rastúca)

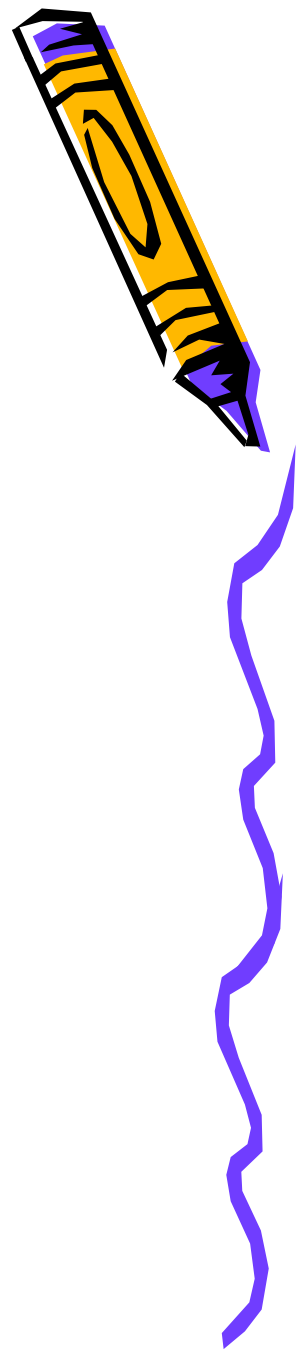
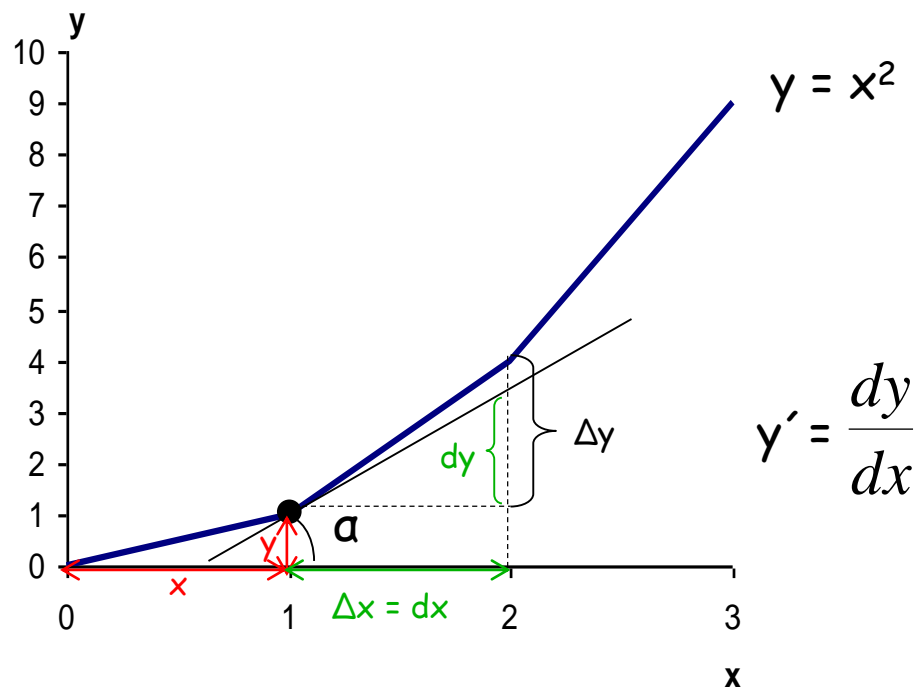




- **Tangenta** funkcie v určitom bode  $x$  je lineárna funkcia, ktorá ma v tomto bode rovnaký sklon ako táto funkcia.
- **Derivácia** je limita miery zmeny  $y$  vo vzťahu k  $x$  pre  $x$  blížiac sa k nule. Derivácia dáva presný význam vete „miera zmeny  $y$  vo vzťahu k  $x$  pre malé zmeny  $x$ “.

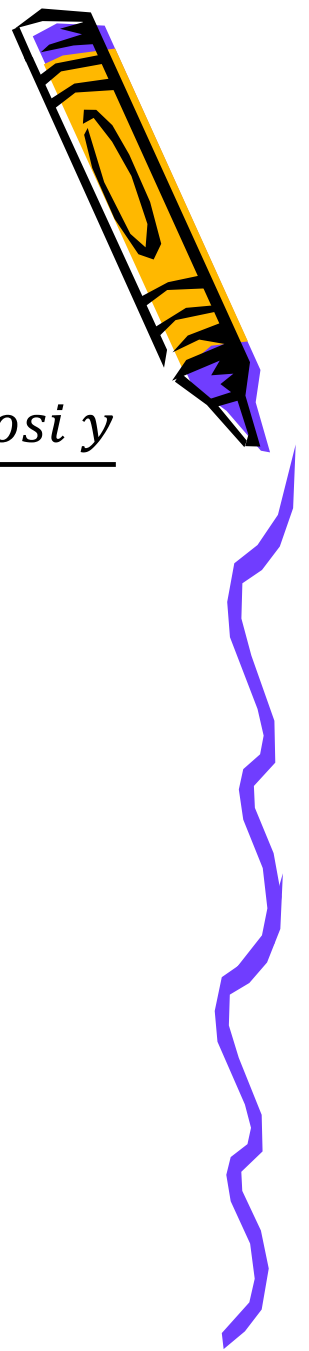
**Geometrický význam derivácie:** Ak je funkcia  $y = f(x)$  graficky zobrazená ako krivka v pravouhlom súradnicovom systéme (vid' obrázky na ďalšej strane), tak  $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$ , kde  $\alpha$  je uhol, ktorý zvierá s osou  $x$  dotyčnica ku krivke v danom bode (meraný kladne, proti smeru pohybu hodinových ručičiek).





Ing. Zuzana Staníková, PhD.

# Hraničné veličiny

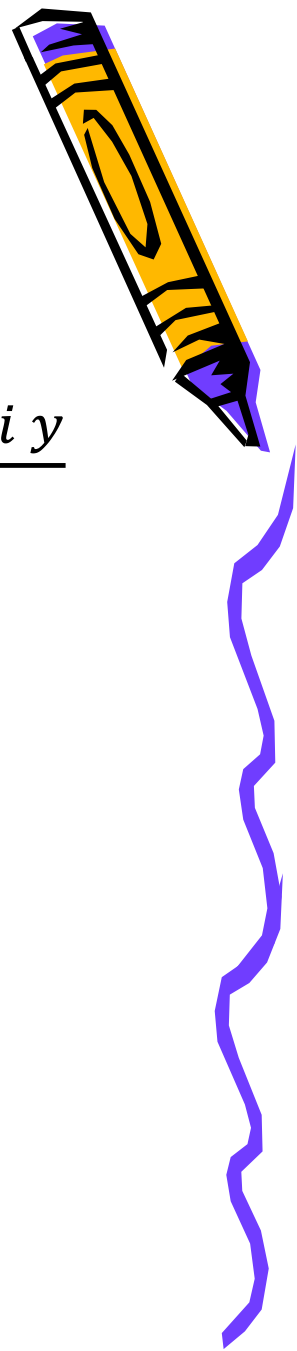


- *hraničná veličina* = 
$$\frac{\Delta \text{ celkovej premennej na osi } y}{\Delta \text{ premennej na osi } x}$$
- Deriváciou funkcie celkovej veličiny dostaneme funkciu hraničnej veličiny.



# Priemerné veličiny

- *priemerná veličina* =  $\frac{\text{celková premenná na osi } y}{\text{premenná na osi } x}$



## Zdroje:

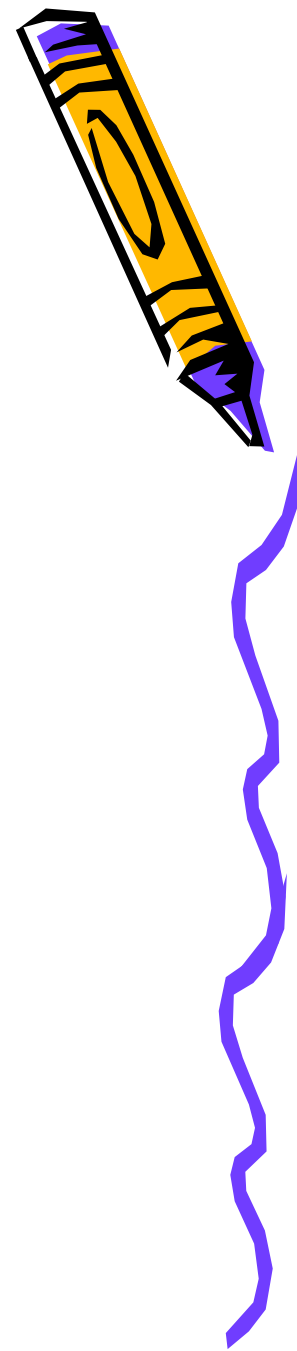
STANÍKOVÁ, Z.: Ekonomie - cvičebnica, 1. vydanie, EDIS vydavateľské centrum ŽU, Žilina 2015

PARKIN, M.: Microeconomics, 11 th edition, Pearson Education Limited, UK, 2014

SCHILLER, B. R.: Mikroekonomie, 1. vydanie, Computer Press, Brno 2004

FRANK, R. H.: Mikroekonomie a chování. 1. vydanie, Nakladatelství Svoboda, Praha 1995

MACÁKOVÁ, L. A KOL.: Mikroekonomie (základní kurs), 3. vydanie, MELANDRUM, Slaný, 1994



Ing. Zuzana Staníková, PhD.